Programme de groupe de travail

Topologie modérée et structures O-minimales

Vadim Lebovici

Exposés basés sur le livre
Tame Topology and O-minimal Structures
de Lou van den Dries

Septembre 2022 – Janvier 2023

Résumé

> [...] La "topologie générale" a été développée (dans les années trente et quarante) par des analystes et pour les besoins de l'analyse, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c'est-à-dire l'étude des propriétés topologiques de formes géométriques diverses. Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des "faux problèmes" (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) comme celle de "l'invariance du domaine" [...].
>
> Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages.
>
> Alexandre Grothendieck [2]

Au cours de ce groupe de travail, nous découvrirons la topologie modérée développée tout au long du XXème siècle via l'axiomatisation introduite par Lou van den Dries en 1984 sous le nom de structures o-minimales. Nous suivrons principalement le livre de van den Dries [1] lui-même. Ceci nous permettra de découvrir en détail plusieurs exemples de telles structures (les semi-linéaires, les semi-algébriques) ainsi que les nombreux théorèmes que cette puissante axiomatique permet de déduire : le théorème de décomposition cellulaire, de triangulation, de trivialisation, et d'autres.

Selon le temps et les affinités des élèves, nous pourrons également aborder une très jolie application – que l'on pourrait nommer "rayons X topologiques" – de cette théorie à travers un théorème de Pierre Schapira [4] qui répond positivement à la question suivante : la connaissance de la caractéristique d'Euler de l'intersection d'une forme géométrique modérée avec chaque hyperplan affine d'un espace Euclidien suffit-elle à reconstruire la forme ?

Prérequis : géométrie différentielle.

Modalités pratiques

- **Contact :** vadim.lebovici@ens.fr, bureau T9 (sous les toits)
- **Horaire et salle :** vendredi 8h30-10h, salle Henri Cartan.
- **Accès au livre :** le livre est disponible à la bibliothèque. Si vous empruntez un exemplaire à la bibliothèque, merci de le rendre après votre exposé pour que les autres puissent l'utiliser.
- **Préparation d'un exposé :** nous nous verrons au moins une fois dans la semaine précédant l'exposé, pour discuter de ce que vous exposerez et éclaircir certaines parties si besoin.
- **Contenu des exposés :** pour chaque chapitre, les items • doivent être traités et les items ⋆ indiquent ce qui peut être traité selon vos goûts personnels et le temps disponible. Il faut compter 1h15 par exposé pour laisser le temps pour des questions. S'il vous reste du temps à la fin de votre exposé, vous pouvez présenter votre solution à un des exercices du chapitre.
- **Critères d'évaluation :** Vous serez évalués sur trois critères : la compréhension et la présentation rigoureuse du contenu de votre exposé, le choix du contenu que vous mettez en valeur dans votre présentation, et enfin la qualité pédagogique de l'exposé.

Programme

0 Motivations (23 septembre, Nazim Khelifa)

1 Quelques résultats élémentaires (30 septembre, Alexandre)

[1, Chap. 1]

- Notations et définitions de structures (§1.1 et §1.2)
- Structures O-minimales (§1.3)
- Groupes et anneaux ordonnés O-minimaux (§1.4)
- Structures de la théorie des modèles (§1.5)

2 Ensembles semi-linéaires et semi-algébriques (7 et 14 octobre, Florian)

[1, Sec. 1.7, Chap. 2]

- Ensembles semi-linéaires (§1.7)
- Ensembles semi-algébriques (Introduction)
- Lemme de Thom et continuité des racines (§2.1)
- Décomposition en cellules semi-algébriques (§2.2)

⋆ Lemme de Thom à paramètres (§2.3)

3 Décompositions cellulaires (21 et 28 octobre, Anna)

[1, Chap. 3]

- Théorème de monotonie et lemme de finitude (§3.1)
- Théorème de décomposition cellulaire (§3.2 sauf §3.2.18-19)

4 Invariants définissables I : dimension (18 novembre, Valentine)

[1, Chap. 3]

⋆ Applications à la connexité (§3.2.18)

⋆ Familles définissables (§3.3)

- Dimension (§4.1)

5 Invariants définissables II : caractéristique d'Euler (25 novembre, Valentine)

[1, Chap. 4]

- Caractéristique d'Euler (§4.2)

⋆ Intégration par rapport à la caractéristique d'Euler [3]

6 Topologie dans les structures o-minimales (2 décembre, Marius)

[1, Chap. 6]

- Sélection de courbe et choix définissable (§1)
- Chemins et partitions de l'unité (§3)

⋆ Propriétés des fibres (§2)

7 Propriétés différentiables (9 décembre, ? ?)

[1, Chap. 7]

- Différentiabilité (§1)
- Théorème d'inversion locale (§2)
- Existence de bonnes directions (§4)

⋆ Théorème de décomposition cellulaire C^1 (§3)

8 Triangulation I (16 décembre, ? ?)

[1, Chap. 8]

- Simplexes et complexes (§1)
- Théorème de triangulation (sauf preuve) (§2)

⋆ Critère d'équivalence définissable (§2.11)

9 Triangulation II (6 janvier, ? ?)

[1, Chap. 8]

- Preuve du théorème de triangulation (§2)
- Rétractions définissables et extensions définissables continues (§3)

⋆ Nombre de types d'homéomorphismes définissables (§2.12)

10 Trivialisation (13 janvier, ? ?)

[1, Chap. 9]

- Théorème de trivialisation (§1)

⋆ Applications (§2)

Références

[1] van den Dries, L. (1998) *Tame topology and O-minimal structures* (vol. 248). Cambridge University Press.

[2] Grothendieck, A. (1984) Esquisse d'un programme.

[3] Schapira, P. (1991) *Operations on constructible functions*. In Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 72, no 1, pp. 83-93.

[4] Schapira, P. (1995) Tomography of constructible functions. In International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Codes (pp. 427-435). Springer, Berlin, Heidelberg.