Corrigés des exercices
Probabilités et statistiques

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Lois de probabilités

Exercice 1. Ecriture ensembliste ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soient A, B et C trois évènements de Ω. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire), les evènements suivants :

0. *Exemple : L'évènement $D =$ "A ne se réalise pas" s'exprime par la formule*[2] *:* $D = \overline{A}$.
1. $E =$ "seul A se réalise",
2. $F =$ "A et B se réalisent mais pas C",
3. $G =$ "les trois évènements se réalisent",
4. $H =$ "au moins l'un des trois évènements se réalise",
5. $I =$ "aucun des trois évènements ne se réalise",
6. $J =$ "exactement deux des trois se réalisent".
7. $K =$ "au plus l'un des trois évènements se réalise",

Solution de l'exercice 1.

1. $E = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,
2. $F = A \cap B \cap \overline{C}$,
3. $G = A \cap B \cap C$,
4. $H = A \cup B \cup C$,
5. $I = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. $J = \big(A \cap B \cap \overline{C}\big) \cup \big(A \cap \overline{B} \cap C\big) \cup \big(\overline{A} \cap B \cap C\big)$,
7. *Deux façons de le voir ici, qui donnent bien sûr le même résultat : "au plus un évènement se réalise" est égale à l'évènement $K' =$ "aucun des trois ou exactement un se réalise" ou encore à l'évènement* contraire *de $K'' =$ "au moins deux se réalisent". Dans le premier cas on trouve $K = K' = I \cup \big(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\big) \cup \big(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\big)$, car "aucun évènement ne se réalise" est le contraire de l'évènement H. Dans le second cas, on trouve $K = \overline{K''}$ où $K'' = J \cup (A \cap B \cap C)$.*

---

1. vadim.lebovici@ens.fr
2. On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 2. Dé pipé ($\star$)

On lance un dé à six faces pipé de sorte qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la probabilité de faire un nombre n avec ce dé soit égale à $n\alpha$.

1. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la valeur du paramètre α de la loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrite par l'énoncé.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Solution de l'exercice 2.

1. *On considère l'univers fini* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. *Puisque* $\mathbb{P}$ *est une loi de probabilité, on a :*

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha \\ &= 21\alpha, \end{aligned}$$

d'où $\alpha = 1/21$.

3. *La probabilité d'obtenir un chiffre pair vaut :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 2/21 + 4/21 + 6/21 \\ &= 12/21. \end{aligned}$$

Exercice 3. Propriétés du cours ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. Montrer que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
   (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Solution de l'exercice 3.

Toutes les questions ont été corrigées en cours sauf la 2.(c). Pour montrer ce résultat, notons que[3] *:*

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B).$$

3. Le montrer si vous n'en êtes pas convaincu·e·s.

De plus, comme $(A \setminus A \cap B) \cap (B \setminus A \cap B) = \emptyset$, on a par l'additivité de $\mathbb{P}$ et la question 2.(a) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

De plus, $\Big((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)\Big) \cap (A \cap B) = \emptyset$, donc par additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

Exercice 4. Encadrement de la probabilité de l'intersection ($\star$)

Soit Ω un univers fini, soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω et soient A et B deux évènements de Ω. Montrer que[4] :

$$\mathbb{P}(A) + P(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Solution de l'exercice 4.

Pour l'inégalité de gauche, on sait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$ (cf. exercice 3 question 3) et que :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

par la question 2.(c) de l'exercice 3. Ainsi, on a que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1$, ou encore :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B).$$

Pour l'inégalité de droite, on sait que $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$. Par la question 2.(a) de l'exercice 3, on a donc que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ et que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$. D'où $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

2 Variables aléatoires

Dans toute cette section, on se fixe un univers fini Ω et une loi de probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω.

Exercice 5. Echauffements I ($\star$)

Soit X une variable aléatoire sur Ω d'univers image est $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$ et de probabilités données par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = -2) &= 0,1 & \qquad \mathbb{P}(X = -1) &= 0,35, \\ \mathbb{P}(X = 2) &= 0,4 & \qquad \mathbb{P}(X = 1) &= 0,15.\end{aligned}$$

4. Montrer que $a \leq \min(b, c)$ est équivalent à montrer que $a \leq b$ et $a \leq c$.

1. Quel est l'univers image de la variable aléatoire X^2 ?
2. La variable aléatoire X^2 suit-elle une loi uniforme ?
3. Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?

Solution de l'exercice 5.

1. $X^2(\Omega) = \{1, 4\}$.

2. *Commençons par noter que*[5] *:*

$$\{X^2 = 1\} = \{X = -1\} \cup \{X = 1\}.$$

De même,

$$\{X^2 = 4\} = \{X = -2\} \cup \{X = 2\}.$$

Comme $\{X = 1\} \cap \{X = -1\} = \emptyset$ *et* $\{X = 2\} \cap \{X = -2\} = \emptyset$ *on peut calculer :*

$$\mathbb{P}(X^2 = 1) = \mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{X = 1\}) = 0,35 + 0,15 = 0,5,$$
$$\mathbb{P}(X^2 = 4) = \mathbb{P}(\{X = -2\} \cup \{X = 2\}) = 0,4 + 0,1 = 0,5.$$

Ainsi, on a bien, pour tout $y \in X^2(\Omega)$, *que* $\mathbb{P}(X^2 = y) = \frac{1}{\#X^2(\Omega)}$, *i.e.* X^2 *suit la loi uniforme.*

3. *Non, on a* $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{X^2 = 1\}) = \mathbb{P}(X = 1) = 0,15 \neq 0,075 = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(X^2 = 1)$.

Exercice 6. Echauffements II ($\star\star$)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même univers image $\{1, \ldots, n\}$ et suivant toutes deux la loi uniforme. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$, avec une aide[6].

Solution de l'exercice 6.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. *On peut facilement vérifier que :*

$$\{X = Y\} = \Big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\Big) \cup \cdots \cup \Big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\Big).$$

D'où, l'on a :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}\Big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\Big) + \cdots + \mathbb{P}\Big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\Big).$$

5. Cette égalité intuitive ne l'est peut-être pas encore pour vous. Pour celles et ceux qui n'en seraient pas convaincus, cela nécessite de vérifier l'égalité suivante par double inclusion :

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega)^2 = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = -1\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\},$$

6. On admettra que l'additivité de $\mathbb{P}$ s'étend aux familles finies d'évènements : si $A_1, \ldots, A_m$ sont m évènements deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$) alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_m)$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\{X = i\} \cap \{Y = i\}\Big) = \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2},$$

car X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme. On peut donc remplacer dans la deuxième équation pour trouver :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

car il y a n termes dans la somme.

Exercice 7. Petits calculs ($\star$)

On considère le même cadre que l'exercice 5.

1. Calculer l'espérance de X et de X^2.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X et de X^2.

Solution de l'exercice 7.

1. *On peut calculer :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= -2 \times 0,1 - 1 \times 0,35 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,4 = 0,4, \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] &= 1 \times 0,5 + 4 \times 0,5 = 2,5. \end{aligned}$$

2. *On peut calculer :*

$$\mathbb{E}\left[X^4\right] = 1 \times 0,5 + 16 \times 0,5 = 8,5.$$

On peut alors calculer en utilisant la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 2,34, \\ \mathbb{V}\left(X^2\right) &= \mathbb{E}\left[X^4\right] - \mathbb{E}\left[X^2\right]^2 = 2,25. \end{aligned}$$

Exercice 8. Formule de König-Huygens ($\star$)

Soit X une VAR sur un univers fini Ω. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.

Solution de l'exercice 8.

Il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance et de développer le carré.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot X + \mathbb{E}[X]^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2. \end{aligned}$$

A la deuxième ligne, on utilise la linéarité de l'espérance sortir la somme de l'espérance et pour sortir $2 \cdot \mathbb{E}[X]$ de l'espérance du milieu. A la troisième ligne, on utilise le fait que, puisque $\mathbb{E}[X]^2$ est un nombre réel constant, $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X]^2$.

Exercice 9. Des variables de Bernoulli ($\star$)

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < 1$ et soit X une variable de Bernoulli de paramètre p.

1. On pose $Y = 1 - X^2$. Montrer que Y est une variable de Bernoulli et donner son paramètre.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution de l'exercice 9.

1. *L'univers image de Y est $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus, on peut calculer :*

$$\{Y = 1\} = \{1 - X^2 = 1\} = \{X^2 = 0\} = \{X = 0\},$$

d'où $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$. La variable Y est donc une variable de Bernoulli de paramètre $1 - p$.

2. *Les variables X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, on peut noter que $\{Y = 0\} \cap \{X = 1\} = \emptyset$ car tout $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in \{X = 1\}$, i.e. $X(\omega) = 1$ vérifiera que $Y(\omega) = 1 - X(\omega)^2 = 1 - 0^2 = 1$, et donc $Y(\omega) \neq 0$ i.e. $\omega \notin \{Y = 0\}$. D'où,*

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0 \neq p \times p = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 0),$$

car $p \neq 0$.

Exercice 10. Une convergence en probabilité ($\star\star$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire réelle X_n centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}[X_n] = 0$) sur Ω et telle que $\mathbb{V}(X_n) = 1/n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(X_n^2 \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution de l'exercice 10.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a par inégalité de Markov appliquée à la variable positive X_n^2,

$$\mathbb{P}(X_n^2 \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\left[X_n^2\right]}{\varepsilon}.$$

De plus, on a par formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}\left[X_n^2\right] - \mathbb{E}[X_n]^2 = \mathbb{E}\left[X_n^2\right],$$

car $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Ainsi, en utilisant que $\mathbb{V}(X_n) = 1/n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n^2 \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon}.$$

En utilisant le fait que $\mathbb{P}$ *est positive pour minorer* $\mathbb{P}(X_n^2 \geq \varepsilon)$ *par* 0*, et le fait que* $1/n\varepsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *(par opérations sur les limites car* $1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*), on a par le théorème d'encadrement des limites :*

$$\mathbb{P}(X_n^2 \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$