Corrigé de l'examen

mercredi 7 juin

Durée : 2 heures

1 Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 2.

1.(a) *On suppose que* $A \subseteq B$*. Montrons que* $E \setminus B \subseteq E \setminus A$*. Soit* $x \in E \setminus B$*, i.e.* $x \notin B$*. Si par l'absurde*[1] $x \in A$*, alors* $x \in B$ *car* $A \subseteq B$*. Ainsi, on a* $x \notin A$*, i.e* $x \in E \setminus A$*.*

1.(b) *On procède par double inclusion. Montrons tout d'abord que* $E \setminus (E \setminus A) \subseteq A$*. Soit* $x \in E \setminus (E \setminus A)$*, i.e.* $x \notin E \setminus A$*. Si par l'absurde* $x \notin A$*, alors* $x \in E \setminus A$*, absurde, c'est donc que* $x \in A$*.*
Montrons désormais que $A \subseteq E \setminus (E \setminus A)$*. Si* $x \in A$*, alors* $x \notin E \setminus A$ *(par l'absurde,* $x \in E \setminus A$ *serait équivalent à* $x \notin A$*). Or, ceci équivaut à* $x \in E \setminus (E \setminus A)$*.*

1.(c) *On peut utiliser la question 1.(a) : comme* $A \subseteq A \cup B$*, alors* $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus A$ *et également* $B \subseteq A \cup B$ *donc* $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus B$*. Ainsi, on a bien* $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus A \cap E \setminus B$*.*

Sinon, on pouvait procéder par double inclusion. Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$*, i.e.* $x \notin A \cup B$*. Montrons tout d'abord que* $x \in E \setminus A$*, i.e.* $x \notin A$*. Si par l'absurde* $x \in A$*, alors* $x \in A \cup B$*, absurde. De même, on montre que* $x \in E \setminus B$*. Ainsi,* $x \in E \setminus A$ *et* $x \in E \setminus B$*, i.e.* $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$*.*

Soit $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$*. On a alors* $x \notin A$ *et* $x \notin B$*. Si par l'absurde* $x \in A \cup B$*, alors* $x \in A$ *ou* $x \in B$*, absurde. Donc* $x \notin A \cup B$*, i.e.* $x \in E \setminus (A \cup B)$*.*

2.(a).i. *Par définition,* f *est injective si pour toutes parties* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $A \neq A'$*, on a* $f(A) \neq f(A')$*, i.e.* $E \setminus A \neq E \setminus A'$*.*

2.(a).ii. *En prenant la contraposée,* f *est injective si pour toutes parties* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $E \setminus A = E \setminus A'$*, on a* $A = A'$*.*

1. En fait, il suffit de prendre la contraposée de la phrase *si* $x \in A$ *alors* $x \in B$ pour obtenir que *si* $x \notin B$*, alors* $x \notin A$, on obtient alors une démonstration plus élégante. Cependant, nous n'avons pas travaillé le passage d'une proposition à sa contraposée, ce n'était donc pas exigible ici, et j'écris la correction en conséquence.

2.(a).iii. *Montrons que f est injective. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' \in \mathcal{P}(E)$ telles que $E \setminus A = E \setminus A'$. Montrons qu'alors $A = A'$ par double inclusion. Montrons donc que $A \subseteq A'$. On a que $E \setminus A \subseteq E \setminus A'$ puisque ces deux ensembles sont égaux par hypothèse, donc $E \setminus (E \setminus A) \subseteq E \setminus (E \setminus A')$ par la question 1.(a), i.e. $A \subseteq A'$ par 1.(b). Le cas $A' \subseteq A$ est symétrique.*

2.(b).i. *Par définition, f est surjective si pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $f(A) = B$, i.e. $E \setminus A = B$.*

2.(b).ii. *Montrons que f est surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. On pose $A = E \setminus B$. On a alors par 1.(b) que $f(A) = E \setminus A = E \setminus (E \setminus B)$ et donc $f(A) = B$ par 1.(c).*

Solution de l'exercice 3.

1. *On a $g(\{1, 2, 3\}) = \{5, 6\}$ et $g^{-1}(\{5, 6\}) = \{1, 2, 3\}$.*

2. *Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On a que $x \in A$ et $x \in B$. Comme alors $x \in A$ et $y = f(x)$, c'est que $y \in f(A)$. Comme aussi $x \in B$ et $y = f(x)$, c'est que $y \in f(B)$. On a donc que $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, i.e. $x \in f(A) \cap f(B)$.*

3.(a) *Soit $a \in A$. Alors, il existe bien $x = a \in A$ tel que $f(a) = f(x)$, donc par définition de $f(A)$, on a $f(a) \in f(A)$. Par définition de l'image réciproque, on a donc bien $a \in f^{-1}(f(A))$.*

3.(b) *Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc que $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective, on a $x = a$ donc $x \in A$.*

4.(a) *Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in B$. Ainsi, on a $y \in B$.*

4.(b) *Soit $b \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = b$. Par définition de l'image réciproque, on a $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, l'élément $b = f(x)$ appartient à $f(f^{-1}(B))$.*

2 Suites et limites

Solution de l'exercice 4.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 5.

1.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{n+1} \end{array}$$

2.

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

3.

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 1 - \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

4.

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 0 \end{array}$$

On pose $M = 0$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 0 \geq 0 = M$, i.e. y est minorée par 0.

5.

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 0 \end{array}$$

On pose $M = 0$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 0 \geq 0 = M$, i.e. y est minorée par 0.

6.

$$z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

Soit $M < 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien et $-M > 0$ et $1 > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-M < n$, i.e. $M > -n = z_n$. On a donc bien montré que z n'était pas minorée.

7.

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

La suite a n'est pas constante car $a_0 = 1 \neq 1/2 = a_1$. De plus, elle tend vers 0, la preuve figure dans le corrigé de la feuille 2 de TD.

Solution de l'exercice 6.

Soit u une suite croissante et qui n'est pas majorée. Supposons que u converge vers un nombre réel ℓ. Comme u converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n < \ell + 1$. Or, comme u n'est pas majorée, il existe un entier N' tel que $u_{N'} > \ell + 1$. On considère $N'' = \max(N, N')$. Comme $N'' \geq N$, on a bien $u_n < \ell + 1$. Comme $N'' \geq N'$ et que u est croissante, on a que $u_{N''} \geq u_{N'} > \ell + 1$. Absurde.

Solution de l'exercice 7.

cf. feuille de TD 2.

Solution de l'exercice 8.

1. *Vrai, c'est le théorème d'opération sur les limites.*

2. *Faux. Les suites*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array},$$

et

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$$

divergent. On sait que u diverge par le cours et si par l'absurde la suite v convergeait alors $-v = u$ aussi. De plus, la suite $u + v$ est la suite constance égale à 0, qui converge donc vers 0.

3. *Vrai. Si par l'absurde $u + v$ convergeait alors $v = (u + v) - u$ aussi par le théorème d'opérations sur les limites. Absurde, puisque v diverge.*

4. *Faux. On prend u la suite constante égale à 0 et v la suite identité. Alors $u \times v$ est aussi la suite constante égale à 0, qui converge.*

Solution de l'exercice 9.

1.(a) *Soit $A > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A < N$. Soit $n \geq N$. On a : $n \geq N > A$ donc $u_n = n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, i.e. u tend vers $+\infty$.*

1.(b) *Supposons par l'absurde que v tend vers $+\infty$. On pose $A = 2$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$. En particulier c'est vrai pour l'indice N, on a $u_N > A$, i.e. $1 > 2$, absurde.*

2.(a) *Soit $A > 0$. Comme u tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$. Soit $n \geq N$. Comme $v_n \geq u_n > A$, on a $v_n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $v_n > A$, i.e. v tend vers $+\infty$.*

2.(b) *Soit $A > 0$. Comme $A/2 > 0$, et u tend vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a $u_n > A/2$. Comme également v tend vers $+\infty$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $v_n > A/2$. On pose $N = \max(N', N'')$. Soit $n \geq N$. Comme $n \geq N'$ par définition du maximum, on a $u_n > A/2$. Comme $n \geq N''$ par définition du maximum, on a $v_n > A/2$. En additionnant ces deux inégalités, on obtient que $u_n + v_n > A/2 + A/2 = A$.*

3. *Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et non-majorée. Soit $A > 0$. Comme u n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Soit $n \geq N$. Comme u est croissante, et que $N \leq n$, on a $u_N \leq u_n$. Ainsi, $u_n \geq u_N > A$, donc $u_n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, i.e. u tend vers $+\infty$.*