Examen

mercredi 7 juin

Durée : 2 heures

Les documents de cours sont interdits.
Les appareils électroniques sont interdits.

Remarques.

1. *Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
2. *N'hésitez pas à poser des questions.*
3. *Vous pouvez (et devrez) utiliser les résultats prouvés aux questions précédentes pour résoudre certaines questions. Lorsque vous le faites, citez précisément le numéro de la question que vous utilisez. Si vous n'avez pas réussi à montrer le résultat que vous souhaitez utiliser, indiquez "en admettant..." avant de le citer.*
4. *Ne restez pas bloqués sur une question, l'examen est volontairement long pour vous permettre de faire en priorité celles que vous savez faire.*
5. *N'hésitez pas à faire des dessins au brouillon pour vous aider.*

1 Ensembles et applications

Exercice 1. Questions de cours

1. Rappeler la définition de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E.
2. Rappeler la définition de la surjectivité d'une application f de X dans Y.
3. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont surjectives, alors $g \circ f : X \to Z$ est surjective.

Exercice 2. Propriétés des opérations ensemblistes

Soit E un ensemble.

1. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$.
   (a) Montrer que[1] si $A \subseteq B$, alors $E \setminus B \subseteq E \setminus A$.
   (b) Montrer que $E \setminus (E \setminus A) = A$.
   (c) Montrer que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
2. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & E \setminus A \end{array}.$$

1. On rappelle que pour $x \in E$, $x \in E \setminus A$ est équivalent à $x \notin A$. Ainsi, avoir l'un équivaut à avoir l'autre et montrer l'un équivaut à montrer l'autre.

(a) Injectivité

i. Ecrire la proposition logique que f doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de f définie ci-dessus).

ii. Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que f est injective).

iii. Montrer que f est injective.

(b) Surjectivité

i. Ecrire la proposition logique que f doit vérifier pour être surjective (i.e. écrire la définition de la surjectivité, dans le cas particulier de f définie ci-dessus).

ii. Montrer que f est surjective.

Exercice 3. Image directe et réciproque

Soit $f : X \to Y$ une application. Pour A une partie de X, on appelle image directe de A par f, et l'on note $f(A)$, l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ il existe } x \in A, \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Pour B une partie de Y, on appelle *image réciproque de B par f*, et l'on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de X défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

1. Donner *sans démonstration* l'image directe de $A = \{1, 2, 3\}$ et l'image réciproque de $B = \{5, 6\}$ par l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2,3\} & \to & \{4,5,6\} \\ 0 & \mapsto & 4 \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 6 \end{array}.$$

2. Soient $A \in \mathcal{P}(X)$ et $B \in \mathcal{P}(Y)$. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
3. Soit A une partie de X.
   (a) Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
   (b) Montrer que si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
4. Soit B une partie de Y.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
   (b) Montrer que si f est surjective, alors $B \subseteq f^{-1}(f(B))$.

2 Suites et limites

Exercice 4. Questions de cours

1. Soit u une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence de u vers ℓ.
2. Enoncer le théorème affirmant que $\mathbb{R}$ est archimédien.
3. Enoncer le théorème assurant la convergence et donnant la limite de la somme et du produit de deux suites convergentes.

Exercice 5. Quelques exemples

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :

— *u est croissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,

— *u est majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.

— *u n'est pas majorée* si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

Donner *sans démonstration* un exemple de suite :

1. qui converge,
2. qui diverge,
3. non constante qui tend vers 1.
4. croissante qui tend vers 0.

Donner *avec démonstration* un exemple de suite :

5. qui est majorée,
6. qui n'est pas majorée,
7. non constante qui tend vers 0.

Exercice 6. Une propriété importante

Montrer qu'une suite croissante et qui n'est pas majorée diverge.

Exercice 7. Inégalité sur les limites

Soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers des limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que $\ell \leq \ell'$. *(Indice : procéder par l'absurde et choisir un ε judicieusement)*

Exercice 8. Vrai ou faux ?

Soient u et v deux suites réelles. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses et le démontrer [2].

1. Si u et v convergent, alors $u + v$ converge.
2. Si u et v divergent, alors $u + v$ diverge.
3. Si u converge et v diverge, alors $u + v$ diverge.

2. On rappelle que l'on doit donner un contre-exemple pour démontrer qu'une assertion est fausse.

4. Si u converge et v diverge, alors $u \times v$ diverge.

Exercice 9. Suites qui tendent vers $+\infty$

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On dit que u *tend vers plus l'infini (noté $+\infty$)*, et l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

$$\text{pour tout } A > 0, \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq N, \text{ on a } u_n > A.$$

1. (a) Montrer que la suite suivante tend vers $+\infty$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}.$$

   (b) Montrer que la suite suivante ne tend pas vers $+\infty$:

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 1 \end{array}.$$

2. Soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles.
   (a) On suppose que u tend vers $+\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que v tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que si u et v tendent vers $+\infty$, alors $u + v$ tend aussi vers $+\infty$.
3. Montrer que si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est croissante et non-majorée, alors u tend vers $+\infty$.