Feuille d'exercices
Suites et limites

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Suites

Exercice 1. Calculs de termes ($\star$)
Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n+1 \end{array}$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

Exercice 2. Des propriétés classiques ($\star$)
Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :

— u *est croissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,
— u *est décroissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \geq u_m$,
— u *est minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.
— u *est majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.
— u *n'est pas minorée* si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < m$.
— u *n'est pas majorée* si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

1. Donner un exemple de suite croissante.
2. Donner un exemple de suite majorée et un de suite non majorée.
3. Donner un exemple de suite non majorée et non croissante.
4. Mêmes questions en remplaçant croissante par décroissante et majorée par minorée.
5. Donner un exemple de suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.
6. Dire si les suites suivantes sont croissantes/décroissantes, majorées ou non, minorées ou non :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

1. vadim.lebovici@ens.fr

2 Limites

Exercice 3. Quelques exemples ($\star$)

1. Montrer que la suite suivante converge et donner sa limite.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array}$$

2. Montrer que la suite suivante converge et donner sa limite. [2]

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{n+1} \end{array}$$

3. Montrer que la suite suivante diverge.

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n \end{array}$$

Exercice 4. Unicité de la limite ($\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On souhaite montrer que si u converge, sa limite est unique [3], i.e :

$$\text{pour tout } \ell \in \mathbb{R} \text{ et } \ell' \in \mathbb{R}, \text{ si } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ et } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell', \text{ alors } \ell = \ell'.$$

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$.

1. Supposons dans un premier temps que $\ell < \ell'$.
   (a) Montrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a $u_n > (\ell + \ell')/2$ (un indice [4]).
   (b) Montrer qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $u_n < (\ell + \ell')/2$.
   (c) Conclure à une absurdité dans le cas où $\ell < \ell'$.
2. Conclure à une absurdité dans le cas où $\ell > \ell'$.
3. Conclure.

Exercice 5. Inégalité sur les limites ($\star\star$)

Soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers des limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que $\ell \leq \ell'$.

Exercice 6. Toute suite convergente est bornée. ($\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite convergente vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.

2. Notez que ce cas est légèrement plus simple que la preuve faite en cours.
3. C'est d'ailleurs ce qui nous autorise à parler de *la* limite d'une suite u lorsqu'elle existe.
4. Poser $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2$ et appliquer la définition de la convergence vers ℓ'.

1. Montrer que u est majorée, i.e qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$. Voici un indice [5] pour vous aider.
2. En déduire [6] que u est minorée, i.e qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.
3. Donner un exemple de suite bornée (i.e. majorée et minorée) qui ne converge pas.

Exercice 7. Suites convergentes d'entiers ($\star\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

u converge si, et seulement si [7], u est stationnaire.

On dit qu'une suite est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n = u_N$. Voici un indice [8] pour vous aider.

5. Le maximum d'un ensemble fini non-vide de nombres réels est bien défini. Ainsi, pour un certain $N \in \mathbb{N}$, vous pouvez par exemple considérer le nombre $\max\{u_0, ..., u_N\}$. C'est le plus petit nombre réel qui est plus grand que tous ceux de l'ensemble $\{u_0, ..., u_N\}$.

6. Noter que si u converge, alors $-u$ aussi et appliquer la question 1. Ne pas oublier que $x \leq y$ est équivalent à $-y \leq -x$.

7. i.e si u converge alors u est stationnaire et réciproquement si u est stationnaire alors u converge.

8. Vous pouvez admettre qu'il y a au plus un entier dans l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \ell - 1/2 < x < \ell + 1/2\}$, i.e. si $k \in E \cap \mathbb{N}$ et $l \in E \cap \mathbb{N}$, alors $k = l$.