Corrigé du partiel

mercredi 5 avril

1 Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 2.

1. *Supposons que* $A \cup B = B$. *Montrons que* $A \subseteq B$. *Soit* $a \in A$. *Dans ce cas, on a* $a \in A \cup B = B$ *donc* $a \in B$.

2. *Supposons que* $A \cap B = B$. *Montrons que* $B \subseteq A$. *Soit* $b \in B$. *Dans ce cas, on a* $b \in B = A \cap B$ *donc* $b \in A$.

Solution de l'exercice 3.

Exercice 3 de la feuille de TD 1.

Solution de l'exercice 4.

1. *Montrons que* s *est injective. Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n' \in \mathbb{N}$ *tels que* $s(n) = s(n')$. *Alors,* $n + 1 = n' + 1$, *donc* $n = n'$. *On a donc bien l'injectivité de* s.

2. *La fonction* s *n'est pas surjective. Supposons que* 0 *ait un antécédent. Alors il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 = s(n) = n + 1$. *Donc* $n = -1$, *absurde.*

3.(a) *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array}.$$

3.(b) *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}.$$

3.(c) *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases} \end{array}$$

3.(d) *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = 1, \\ n & \text{si } n > 1. \end{cases} \end{array}$$

3.(e) *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & \text{si } n \text{ est pair}, \\ -2k-1 & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases} \end{array}$$

Solution de l'exercice 5.

Exercice 5 de la feuille de TD 1.

Solution de l'exercice 6.

1. *On a* $g^{-1}(\{5,6\}) = \{1,2,3\}$.

2.(a) *Supposons* $A \subseteq B$. *Montrons que* $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. *Soit* $x \in f^{-1}(A)$. *Par définition,* $f(x) \in A$. *Comme* $A \subseteq B$, *on a que* $f(x) \in B$. *Par définition, on a donc bien que* $x \in f^{-1}(B)$.

2.(b) *Procédons par double inclusion. Soit* $x \in f^{-1}(A \cup B)$. *Alors* $f(x) \in A \cup B$ *donc* $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$. *Si* $f(x) \in A$, *alors* $x \in f^{-1}(A)$ *par définition et si* $f(x) \in B$ *alors* $x \in f^{-1}(B)$ *par définition. Dans tous les cas, on a bien* $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
Soit maintenant $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. *Alors* $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$. *Donc* $f(x) \in A \cup B$ *et* $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

2.(c) *Procédons par double inclusion. Soit* $x \in X \setminus f^{-1}(A)$. *Alors* $x \notin f^{-1}(A)$, *i.e.* $f(x) \notin A$, *i.e.* $f(x) \in Y \setminus A$, *i.e.* $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. *Soit* $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. *De même, on a* $f(x) \notin A$ *donc* $x \notin f^{-1}(A)$, *i.e.* $x \in X \setminus f^{-1}(A)$.

3. *Montrons que* f *est injective. Soit* $x \in X$ *et* $x' \in X$ *tel que* $f(x) = f(x')$. *En posant* $y = f(x)$ *on a que* $f(x) \in \{y\}$ *et* $f(x') = f(x) \in \{y\}$. *Donc* $x \in f^{-1}(\{y\})$ *et* $x' \in f^{-1}(\{y\})$. *Comme l'ensemble* $f^{-1}(\{y\})$ *ne contient au plus qu'un seul élément, on a* $x = x'$.

4.(a).i *L'application* ϕ *est injective si pour tout* $A \in \mathcal{P}(X)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(X)$ *tels que* $A \neq A'$, *on a* $\phi(A) \neq \phi(A')$, *i.e.* $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(A')$.

4.(a).ii *Autrement dit, l'application* ϕ *est injective si pour tout* $A \in \mathcal{P}(X)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(X)$ *tels que* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$, *on a* $A = A'$.

4.(a).iii *Soient* $A \in \mathcal{P}(X)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(X)$ *tels que* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$. *Montrons que* $A = A'$. *Procédons par double-inclusion. Soit* $y \in A$. *Comme* f *est surjective, il existe* $x \in X$ *tel que* $y = f(x)$. *Dans ce cas,* $f(x) = y \in A$ *donc* $x \in f^{-1}(A)$. *Comme* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$, *on a aussi que* $x \in f^{-1}(A')$, *i.e.* $f(x) \in A'$. *Donc* $y = f(x) \in A'$. *L'autre inclusion est symétrique.*

4.(b).i *L'application* ϕ *est surjective si pour tout* $B \in \mathcal{P}(X)$, *il existe* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *tel que* $\phi(A) = B$, *i.e.* $f^{-1}(A) = B$.

4.(b).ii *Montrons que* $\phi(A) = B$, *i.e.* $f^{-1}(A) = B$. *Procédons par double-inclusion. Soit* $x \in B$. *Montrons que* $x \in f^{-1}(A)$, *i.e.* $f(x) \in A$. *En posant* $y = f(x)$, *on a bien l'existence de* $x \in B$ *tel que* $f(x) = y$, *i.e.* $y \in A$ *par définition de* A. *Donc* $f(x) \in A$ *et* $x \in f^{-1}(A)$.
Soit maintenant $x \in f^{-1}(A)$. *Montrons que* $x \in B$. *Alors* $f(x) \in A$. *En posant* $y = f(x)$, *on a* $y \in A$ *donc il existe* $x' \in B$ *tel que* $y = f(x')$. *On a alors* $f(x) = y = f(x')$. *Comme* f *est injective, ceci implique* $x = x'$. *Comme* $x' \in B$, *on a aussi* $x \in B$.

4.(b).iii *Soit* $B \in \mathcal{P}(X)$. *On pose* A *comme dans la question précédente. On a alors que* $\phi(A) = B$ *par la question précédente. On a donc bien montré que pour tout* $B \in \mathcal{P}(X)$, *il existe* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *tel que* $\phi(A) = B$, *i.e.* ϕ *est surjective.*

Solution de l'exercice 7.

1.(a).i *Pour tous* $X \in \mathcal{P}(E)$ *et* $X' \in \mathcal{P}(E)$ *tels que* $X \neq X'$, *on a* $f(X) \neq f(X')$, *i.e.,* $A \cap X \neq A \cap X'$.

1.(a).ii *Pour tous* $X \in \mathcal{P}(E)$ *et* $X' \in \mathcal{P}(E)$ *tels que* $f(X) = f(X')$, *on a* $X = X'$.

1.(a).iii *Soient* $X \in \mathcal{P}(E)$ *et* $X' \in \mathcal{P}(E)$ *tels que* $f(X) = f(X')$, *i.e.,* $A \cap X = A \cap X'$. *Montrons que* $X = X'$. *On a supposé que* $A = E$, *donc* $X = E \cap X = A \cap X = A \cap X' = E \cap X' = X'$.

1.(a).iv *La fonction* f *est surjective si pour tout* $Y \in \mathcal{P}(E)$, *il existe* $X \in \mathcal{P}(E)$ *telle que* $Y = f(X$, *i.e., telle que* $Y = A \cap X$. *Soit* $Y \in \mathcal{P}(E)$. *On pose* $X = Y$. *On a alors* $f(X) = A \cap X = E \cap X = X = Y$. *D'où la surjectivité de* f.

1.(b) *Montrons que* f *n'est pas injective. On pose* $X = \varnothing$ *et* $X' = \{e\}$. *Alors* $f(X') = A \cap \{e\} = \varnothing$ *car* $e \ni A$. *De plus,* $f(X) = A \cap \varnothing = \varnothing$. *D'où* $f(X) = f(X')$. *Mais* $X \neq X'$, *donc* f *n'est pas injective.*
Montrons que f *n'est pas surjective. On pose* $Y = \{e\}$. *Supposons qu'il existe* $X \in \mathcal{P}(E)$ *tel que* $Y = f(X) = A \cap X$. *On aurait* $e \in Y = A \cap X$ *donc* $e \in A$, *absurde.*

2.(a) *Similaire à la question 1.(a).*

2.(b) *On suppose $A \neq \varnothing$. Dans ce cas, il existe un élément $e \in A$. Montrons que g n'est pas injective. On pose $X = \varnothing$ et $X' = \{e\}$. On a encore $f(X) = f(X')$, mais $X \neq X'$. Donc g n'est pas injective.*
Montrons que g n'est pas surjective. On pose $Y = \varnothing$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, l'ensemble $g(X) = X \cup A$ contient e, donc est non vide. En particulier, on a pas $Y = g(X)$. Donc Y n'a pas d'antécédent par g et la fonction g n'est donc pas surjective.

Solution de l'exercice 8.

1. *Supposons que f est surjective. Montrons que f est injective. Soient $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. De même, il existe $t' \in E$ tel que $x' = f(t')$. En répétant l'opération, on montre qu'il existe $u \in E$ et $u' \in E$ tels que $t = f(u)$ et $t' = f(u')$. En répétant encore l'opération, on montre qu'il existe $v \in E$ et $v' \in E$ tels que $u = f(v)$ et $u' = f(v')$. On a alors :*

$$t = f(u) = f(f(f(u))) = f(f(t)) = f(x) = f(x') = f(f(t')) = f(f(f(u'))) = f(u') = t'.$$

Comme $t = t'$, on a $f(t) = f(t')$, c'est-à-dire $x = x'$. D'où l'injectivité de f.

2. *Supposons que f soit injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$. On peut alors calculer $f(y) = f(f(f(y)))$. On pose $x = f(y)$, de sorte que $f(y) = f(f(x))$. Comme f est injective, on a $y = f(x)$. On a donc bien montré que pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*

Solution de l'exercice 9.

1. *Supposons que f est injective. Procédons par double inclusion. Montrons que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On a que $x \in A$ et $x \in B$. Comme alors $x \in A$ et $y = f(x)$, c'est que $y \in f(A)$. Comme aussi $x \in B$ et $y = f(x)$, c'est que $y \in f(B)$. On a donc que $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, i.e. $x \in f(A) \cap f(B)$.*
Montrons que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Comme $x \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. De plus, comme $x \in f(B)$, il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Ainsi, $y = f(a) = f(b)$. Comme f est injective, on a donc que $a = b$. On peut alors poser $x = a$ pour obtenir que $x \in A \cap B$ (car $x = a \in A$ et $x = a = b \in B$) et que $y = f(x)$ car $y = f(a)$. Ainsi, on a bien montré qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, i.e. $y \in f(A \cap B)$.

2. *Montrons que f est injective. Soit $x \in X$ et $x' \in X$ tels que $x \neq x'$. On pose $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$, de sorte que $A \cap B = \varnothing$. On a alors que $f(A) = \{f(x)\}$ et $f(B) = \{f(x')\}$. De plus, on a par hypothèse que $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ donc $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = f(\varnothing) = \varnothing$. Donc $f(x) \neq f(x')$. On a bien montré l'injectivité de f.*