# Partiel

## mercredi 5 avril

Durée : 2 heures

*Les documents de cours et les calculatrices sont interdits.*

**Remarques.**

1. *Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
2. *N'hésitez pas à poser des questions.*
3. *Vous pouvez (et devrez) utiliser les résultats prouvés aux questions précédentes pour résoudre certaines questions. Lorsque vous le faites, citez précisément le numéro de la question que vous utilisez. Si vous n'avez pas réussi à montrer le résultat que vous souhaitez utiliser, indiquez "en admettant..." avant de le citer.*
4. *Ne restez pas bloqués sur une question, le partiel est volontairement long pour vous permettre de faire en priorité celles que vous savez faire.*
5. *N'hésitez pas à faire des dessins au brouillon pour vous aider.*

**Exercice 1. Questions de cours**

1. Rappeler la définition de l'injectivité d'une application $f$ de $X$ dans $Y$.
2. Rappeler la définition de la surjectivité d'une application $f$ de $X$ dans $Y$.
3. Rappeler la définition d'ensemble fini et infini.
4. Rappeler la définition d'équipotence.

**Exercice 2. Echauffements**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

1. Montrer que si $A \cup B = B$ alors $A \subseteq B$.
2. Montrer que si $A \cap B = B$ alors $B \subseteq A$.

**Exercice 3. Parties et opérations ensemblistes**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

1. (a) Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$.
   (b) Donner un exemple de $E$ et de $F$ pour lesquels l'inclusion $\mathcal{P}(E \cup F) \subseteq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ***n'est pas*** vérifiée.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

**Exercice 4. Premier exemple**

On considère l'application suivante :

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}.$$

1. Montrer qu'elle est injective.
2. Est-elle surjective ? Justifier.
3. Donner *sans démonstration* un exemple différent de $s$ :
   (a) d'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (b) d'application injective non surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (c) d'application surjective non injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (d) d'application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ différente de la fonction identité.
   (e) d'application injective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$. On rappelle que :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

**Exercice 5. Gammes sur l'injectivité et la surjectivité**

Soient $X$, $Y$ et $Z$ trois ensembles. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que :

1. Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
3. Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.
4. Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et où $f$ ne l'est pas.
5. Si $g \circ f$ est surjective et $g$ est injective, alors $f$ est surjective.

**Exercice 6. Image réciproque**

Soit $f : X \to Y$ une application. Pour $A$ une partie de $Y$, on appelle *image réciproque de $A$ par $f$*, et l'on note $f^{-1}(A)$, le sous-ensemble de $X$ défini par :

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

1. Donner *sans démonstration* l'image réciproque de $A = \{5, 6\}$ par l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2,3\} & \to & \{4,5,6\} \\ 0 & \mapsto & 4 \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 6 \end{array}.$$

2. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$.
   (a) Montrer que si $A \subseteq B$, alors $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

(b) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) Montrer que $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$.

3. On suppose que pour tout $y \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ ne contient au plus qu'un seul élément. Montrer que $f$ est injective.

4. On considère l'application suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \to & \mathcal{P}(X) \\ A & \mapsto & f^{-1}(A) \end{array}.$$

(a) Dans cette question, on supposera $f$ surjective.

i. Ecrire la proposition logique que $\phi$ doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de $\phi$ définie ci-dessus).

ii. Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que $\phi$ est injective).

iii. Montrer que $\phi$ est injective.

(b) Dans cette question, on supposera $f$ injective.

i. Ecrire la proposition logique que $\phi$ doit vérifier pour être surjective (i.e. écrire la définition de la surjectivité, dans le cas particulier de $\phi$ définie ci-dessus).

ii. Soit $B \in \mathcal{P}(X)$. On pose $A \in \mathcal{P}(X)$ défini par :

$$A = \{y \in Y \mid \text{ il existe } x \in B, \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Montrer que $\phi(A) = B$.

*Mise en garde : cette égalité est une égalité entre parties de $X$. Elle se montre donc comme n'importe quelle égalité entre ensembles.*

iii. Montrer que $\phi$ est surjective.

**Exercice 7. Injectivité, surjectivité et parties**

Soient $E$ un ensemble et $A \subseteq E$.

1. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cap X \end{array}.$$

(a) Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $A = E$.

i. Ecrire la proposition logique que $f$ doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de $f$ définie ci-dessus).

ii. Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que $f$ est injective).

iii. Montrer que $f$ est injective.

iv. Mêmes questions pour la surjectivité : montrer que $f$ est surjective, en commençant par écrire explicitement ce que cela signifie.

(b) On suppose qu'il existe $e \in E$ tel que $e \notin A$. Montrer que $f$ n'est ni injective, ni surjective.

2. On considère l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array},$$

   (a) Montrer que si $A = \emptyset$, alors $g$ est bijective.

   (b) Montrer que si $A \neq \emptyset$, alors $g$ n'est ni injective, ni surjective.

**Exercice 8. Encore une étude d'injectivité et de surjectivité.**

Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.

1. Montrer que si $f$ est surjective, alors $f$ est injective.
2. Montrer que si $f$ est injective, alors $f$ est surjective.

**Exercice 9. Image directe.**

Soit $f : X \to Y$ une application. Pour $A$ une partie de $X$, on appelle *image directe de $A$ par $f$*, et l'on note $f(A)$, l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ il existe } x \in A, \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

1. Soient $A$ et $B$ deux parties de $X$. Montrer que si $f$ est injective, alors :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B). \tag{1}$$

2. On suppose désormais que pour toutes parties $A$ et $B$ de $X$, l'équation (1) est vérifiée. Montrer que $f$ est surjective.